

8. Soit $V = \mathbb{P}_3$. Posons

$$q_1(x) = 1, \quad q_2(x) = x + 1, \quad q_3(x) = x^2 + x, \quad q_4(x) = x^3 + x^2.$$

Montrons que $\mathcal{B} = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ est une base de V .

Indépendance linéaire. Supposons

$$a q_1(x) + b q_2(x) + c q_3(x) + d q_4(x) = 0.$$

En développant et en regroupant par puissances de x :

$$(a + b) + (b + c)x + (c + d)x^2 + dx^3 = 0.$$

Par identification des coefficients, on obtient le système :

$$\begin{cases} d = 0, \\ c + d = 0, \\ b + c = 0, \\ a + b = 0, \end{cases} \Rightarrow a = b = c = d = 0.$$

Ainsi, les polynômes q_1, q_2, q_3, q_4 sont linéairement indépendants.

Génération. Soit $p(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \in \mathbb{P}_3$. Cherchons $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$p(x) = a q_1(x) + b q_2(x) + c q_3(x) + d q_4(x).$$

Comme plus haut, l'égalité des coefficients impose :

$$\begin{cases} d = D, \\ c + d = C, \\ b + c = B, \\ a + b = A, \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} d = D, \\ c = C - D, \\ b = B - C + D, \\ a = A - B + C - D. \end{cases}$$

Il existe donc toujours des réels a, b, c, d réalisant $p(x)$.

Donc $\mathcal{B} = (1, x + 1, x^2 + x, x^3 + x^2)$ est une base de \mathbb{P}_3 .

Théorème 4.22

Théorème de la base extraite

Soit V un espace vectoriel. Soit $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ un ensemble de vecteurs de V et soit $W = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_k)$ le sous-espace vectoriel de V engendré par S .

1. Si un vecteur de S est combinaison linéaire des autres, on peut le supprimer sans changer l'espace engendré : les autres vecteurs engendrent encore W .
2. Si $W \neq \{0_V\}$, alors il existe un sous-ensemble de S qui est une base de W . Autrement dit, il est possible d'extraire de l'ensemble S une base de W .

Démonstration. 1. Supposons que v_k s'écrit comme combinaison linéaire de v_1, v_2, \dots, v_{k-1} (si ce n'est pas le cas, il suffit de renuméroter les vecteurs) :

$$v_k = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{k-1} v_{k-1}$$

Soit maintenant w un vecteur quelconque de W . Comme S engendre W nous avons :

$$\begin{aligned} w &= \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{k-1} v_{k-1} + \mu_k v_k \\ &= \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{k-1} v_{k-1} + \mu_k (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{k-1} v_{k-1}) \\ &= (\mu_1 + \mu_k \lambda_1) v_1 + (\mu_2 + \mu_k \lambda_2) v_2 + \dots + (\mu_{k-1} + \mu_k \lambda_{k-1}) v_{k-1} \end{aligned}$$

ce qui montre que $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$ engendre encore W .

2. Si S est linéairement indépendant, alors S est une base. Sinon l'un des vecteurs de S est une combinaison linéaire des autres et d'après le point 1, on peut l'enlever. On continue de la sorte jusqu'à ce que l'ensemble de vecteurs restant soit linéairement indépendant. \square

Théorème 4.23

Soit V un espace vectoriel qui admet $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ pour base.

Si $m > n$, alors tout ensemble de vecteurs de V formé de m vecteurs est forcément linéairement dépendant.

Démonstration. Soit $\{w_1, \dots, w_m\}$, avec $m > n$, un ensemble de vecteurs de V . Il faut montrer que

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m = 0_V \quad (\star)$$

possède une solution non triviale $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \neq (0, 0, \dots, 0)$.

Comme $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ est une base de V , tout vecteur de V peut s'écrire comme une combinaison linéaire de b_1, b_2, \dots, b_n . En particulier

$$\begin{cases} w_1 = a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots + a_{1n}b_n \\ w_2 = a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ w_m = a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \dots + a_{mn}b_n \end{cases}$$

En remplaçant dans (\star) nous trouvons :

$$\lambda_1 (a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots + a_{1n}b_n) + \dots + \lambda_m (a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \dots + a_{mn}b_n) = 0_V$$

ou de manière équivalente

$$(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \dots + \lambda_m a_{m1}) b_1 + \dots + (\lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \dots + \lambda_m a_{mn}) b_n = 0_V.$$

Comme $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ est une base de V , les vecteurs b_1, b_2, \dots, b_n sont linéairement indépendants et par conséquent, tous les coefficients de cette équation sont nuls :

$$\underbrace{(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \dots + \lambda_m a_{m1})}_{=0} b_1 + \dots + \underbrace{(\lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \dots + \lambda_m a_{mn})}_{=0} b_n = 0_V.$$

Nous trouvons ainsi un système de n équations homogènes à m inconnues $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$:

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + \dots + a_{m1}\lambda_m = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}\lambda_1 + a_{2n}\lambda_2 + \dots + a_{mn}\lambda_m = 0 \end{cases}$$

Comme par hypothèse $m > n$, le système possède des solutions non triviales, ce qui entraîne la dépendance linéaire des vecteurs w_1, w_2, \dots, w_m . \square

Corollaire 4.24

Soit V un espace vectoriel qui admet comme bases $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ et $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \dots, c_m)$. Alors $m = n$.
Autrement dit, toutes les bases d'un espace vectoriel ont le même nombre d'éléments.

Démonstration. Soit (b_1, b_2, \dots, b_n) et (c_1, c_2, \dots, c_m) deux bases de V .

Comme (b_1, \dots, b_n) est une base et par définition les vecteurs w_1, \dots, w_m sont linéairement indépendants, le théorème 4.23 nous donne $m \leq n$.

En échangeant les rôles de (b_1, b_2, \dots, b_n) et (c_1, c_2, \dots, c_m) nous obtenons $n \leq m$.

Par conséquent, $m = n$. \square

Définition 4.25*Dimension d'un espace-vectoriel*

Soit V un espace vectoriel. Alors V est forcément dans l'un des deux cas suivants :

1. V admet une famille génératrice avec un nombre fini d'éléments. Alors V admet des bases, qui ont toutes le même nombre d'éléments. Dans ce cas, la *dimension* de V est le nombre de vecteurs d'une base de V . Elle est notée $\dim V$.
2. Si V n'admet pas de famille finie génératrice, on dira que V est de dimension infinie : $\dim V = \infty$.

Remarque 4.4.0.26. Comme $\{0_V\}$ est un ensemble linéairement dépendant, l'espace vectoriel $\{0_V\}$ ne peut pas avoir de base et nous posons

$$\dim\{0_V\} = 0.$$

Exemples. 1. $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ car $\mathcal{E} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

2. $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ car $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de \mathbb{R}^n .

3. $\dim(\mathbb{P}_2) = 3$ car $\mathcal{E} = (1, x, x^2)$ est une base de \mathbb{P}_2 .

4. $\dim(\mathbb{P}_n) = n + 1$ car $\mathcal{E} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ est une base de \mathbb{P}_n .

5. $\dim(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})) = 4$ car

$$\mathcal{E} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

est une base de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

6. $\dim(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})) = mn$.

7. L'ensemble des fonctions et l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sont deux espaces vectoriels de dimension infinie.

Remarque importante 4.27

À de rares exceptions près, ce cours traitera essentiellement d'espaces vectoriels de dimension finie.

Théorème 4.28

Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$.

1. Tout ensemble de n vecteurs linéairement indépendants engendre V ; c'est donc une base de V .
2. Tout ensemble de n vecteurs qui engendre V est linéairement indépendant ; c'est donc une base de V .

Remarque 4.4.0.29. Si la dimension $n > 0$ de l'espace vectoriel V est connue, pour obtenir une base de V il suffit de trouver :

- soit n vecteurs linéairement indépendants de V ,
- soit un système générateur de V formé de n vecteurs.

Exemple. Montrer que $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, il suffit de montrer que les trois vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sont

linéairement indépendants :

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, les vecteurs donnés forment bien une base de \mathbb{R}^3 .

Propriété 4.30

Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$.

1. Si $m < n$, alors un ensemble formé de m vecteurs de V n'engendre pas V .
2. Si $m < n$, alors un ensemble formé de m vecteurs linéairement indépendants de V peut être complété pour former une base de V .

Exemple. Soit $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels. On a $\dim V = 4$.

1. Considérons les trois matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ces matrices ($m = 3 < 4$) sont linéairement indépendantes.

En effet, si

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

alors

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_1 = 0.$$

Ces matrices sont donc linéairement indépendantes. Mais elles n'engendrent pas tout $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: toute combinaison linéaire est de la forme

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix},$$

et ne permet pas d'obtenir de matrices dont le coefficient $(2, 2)$ est non nul. Ainsi,

$$\text{Vect}(A_1, A_2, A_3) \neq \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

2. On peut compléter cet ensemble pour former une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en ajoutant, par exemple,

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Propriété 4.31

Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$. Soit W un sous-espace vectoriel de V . Nous avons :

1. $\dim W \leq \dim V$.
2. Si $\dim W = \dim V$ alors $W = V$.

Démonstration. Soit (w_1, w_2, \dots, w_m) une base de W .

1. Comme par définition les vecteurs w_1, \dots, w_m sont linéairement indépendants, alors le Théorème 4.23 implique $m \leq \dim V$.
2. Si $m = \dim V$, alors par le Théorème 4.28, point 1, les m vecteurs w_1, \dots, w_m engendrent V et forment une base de V . Ainsi $W = V$.

□

Exemple. Soit $V = \mathbb{P}_3$, de dimension 4.

1. Considérons

$$W = \{p \in \mathbb{P}_3 \mid p(0) = 0\} = \{ax + bx^2 + cx^3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Alors $\{x, x^2, x^3\}$ engendre W et est linéairement indépendant, d'où

$$\dim W = 3 < 4 = \dim V.$$

2. **Sous-espace engendré par 4 polynômes indépendants.**

Posons

$$q_1(x) = 1, \quad q_2(x) = x + 1, \quad q_3(x) = x^2 + 2, \quad q_4(x) = x^3 + x,$$

et soit $W' = \text{Vect}(q_1, q_2, q_3, q_4) \subset V$.

Montrons que q_1, q_2, q_3, q_4 sont linéairement indépendants. Supposons

$$a q_1(x) + b q_2(x) + c q_3(x) + d q_4(x) = 0.$$

En identifiant les coefficients après développement :

$$(a + b + 2c) + (b + d)x + cx^2 + dx^3 = 0,$$

d'où le système

$$\begin{cases} d = 0, \\ c = 0, \\ b + d = 0, \\ a + b + 2c = 0, \end{cases} \implies a = b = c = d = 0.$$

Ainsi, $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ est libre, c'est donc une base de $W' = \text{Vect}(q_1, q_2, q_3, q_4)$.

On a donc $W' \subset \mathbb{P}_3$ et $\dim W' = 4 = \dim \mathbb{P}_3$. Donc $W' = \mathbb{P}_3$.

Vecteur de coordonnées par rapport à une base

Théorème 4.32

Coordonnées des vecteurs

Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$.

Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V . Alors tout vecteur v de V s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de b_1, \dots, b_n :

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n, \quad \text{avec } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Soit $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ et $v = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$ deux écritures de v . Nous avons

$$0_V = (\lambda_1 - \mu_1)b_1 + (\lambda_2 - \mu_2)b_2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)b_n.$$

Comme les vecteurs b_1, \dots, b_n sont linéairement indépendants, nous trouvons $\lambda_j - \mu_j = 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$, donc $\lambda_j = \mu_j$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. \square

Remarque 4.4.0.33. *Un système générateur « couvre » l'espace ; l'indépendance linéaire « évite les redondances ». Une base « couvre sans redondances ».*

Définition 4.34

Coordonnées

Les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sont appelés *coordonnées de v dans la base \mathcal{B}* .

Notation. Il suit du Théorème 4.32 que pour tout choix d'une base \mathcal{B} de V , nous pouvons

associer le vecteur $v \in V$ au vecteur $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, appelé *vecteur des coordonnées de v dans la*

base \mathcal{B} , noté $[v]_{\mathcal{B}}$:

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n \in V \quad \Leftrightarrow \quad [v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Attention! L'ordre des vecteurs de la base est important. Il détermine l'ordre des λ_i dans l'écriture de $[v]_{\mathcal{B}}$

Exemples. 1. Trouver les coordonnées de $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ par rapport à :

(a) la base canonique $\mathcal{E} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

(b) la base $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$:

Nous cherchons $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{bmatrix}.$$

Nous devons résoudre le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda - \mu = 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = -1 \end{cases}$$

Nous avons donc

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

2. Soit $V = \mathbb{P}_2$ et $\mathcal{E} = (1, x, x^2)$ la base canonique de $V = \mathbb{P}_2$. Nous avons :

$$p(x) = 2 - 3x + 7x^2 \in \mathbb{P}_2 \iff [p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

En prenant $B = (x^2, x, 1)$ nous trouvons :

$$p(x) = 2 - 3x + 7x^2 \in \mathbb{P}_2 \iff [p]_B = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Remarque 4.4.0.35. L'ordre des vecteurs dans une base est bel et bien important.

3. Soit $V = \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et \mathcal{E} la base canonique de $V = \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Nous avons :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \iff [A]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

Remarque 4.4.0.36. L'écriture d'un vecteur $v \in V$ sous la forme

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n$$

revient à exprimer v à l'aide des vecteurs de référence b_1, \dots, b_n de la base \mathcal{B} . Les nombres réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ jouent le rôle des coordonnées de v : ils indiquent « combien de fois » chaque vecteur de la base intervient dans la construction de v .

Il y a donc une correspondance entre l'espace vectoriel V et l'espace concret \mathbb{R}^n , à condition d'avoir choisi une base \mathcal{B} .

Ainsi, le vecteur v appartient à un espace vectoriel V quelconque (polynômes, matrices, fonctions...), mais son vecteur de coordonnées $[v]_{\mathcal{B}}$ appartient à \mathbb{R}^n , ce qui permet de travailler avec les outils du chapitre 1. Tout cela nous sera très utile à la section 4.6.2.

4.3 Noyau et image d'une matrice

Définition 4.37

Noyau d'une matrice

Soit $A = (a_{jk})$ une matrice de taille $m \times n$. L'ensemble des solutions de $A\vec{x} = \vec{0}$ est appelé le *noyau de la matrice* A , noté $\text{Ker}(A)$.

$$\text{Ker}(A) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0} \} \subset \mathbb{R}^n.$$

Remarques 4.4.0.38. 1. Soit $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$,
 $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$,

alors $\text{Ker}(T_A) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid T_A(\vec{x}) = \vec{0} \}$, donc $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(T_A)$.

2. L'ensemble des solutions du système d'équations linéaires homogènes

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

est le noyau de A .

Propriété 4.39

$\text{Ker}(A)$ forme un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Démonstration. 1. $\vec{0} \in \text{Ker}(A)$ car $A\vec{0} = \vec{0}$.

2. Soit $\vec{x}, \vec{y} \in \text{Ker}(A)$. On a $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ donc $\vec{x} + \vec{y} \in \text{Ker}(A)$.

3. Soit $\vec{x} \in \text{Ker}(A)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x} = \lambda\vec{0} = \vec{0}$ donc $\lambda\vec{x} \in \text{Ker}(A)$.

□

Remarque importante 4.40

Si $\vec{b} \neq \vec{0}$, alors les solutions du système inhomogène

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

ne forment pas de sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n car $\vec{x} = \vec{0}$ n'est pas solution de l'équation.

Rappelons d'ailleurs qu'au chapitre 1, nous avons vu que l'ensemble des solutions de $A\vec{x} = \vec{b}$ est un translaté de l'ensemble des solutions de $A\vec{x} = \vec{0}$.

Théorème 4.41

La dimension du noyau de A correspond au nombre de variables libres dans la résolution de $A\vec{x} = \vec{0}$.

Démonstration. Lorsqu'on résout le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$, la forme échelonnée de A fait apparaître p variables libres (associées aux colonnes non pivot) et $n - p$ variables de base (associées aux colonnes pivot).

Chaque solution est entièrement déterminée par le choix arbitraire des p variables libres, les variables de base se déduisant alors automatiquement des équations.

Ainsi, l'ensemble des solutions est un sous-espace de \mathbb{R}^n décrit par p paramètres indépendants : c'est donc un sous-espace de dimension p .

Autrement dit :

$$\dim(\ker(A)) = \text{nombre de variables libres.}$$

□

Exemples. 1. Considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

On résout le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

On a un seul pivot, colonne 1, qui correspond à la variable de base. Les variables x_2 et x_3 sont libres.

Ainsi :

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t, u \in \mathbb{R}, \text{ donc } \ker(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Donc $\dim(\ker(A)) = 2$.

$$2. \text{ Soit } A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 8 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ donc } x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont variables de base, et } x_3 \text{ libre.}$$

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}, \text{ donc } \ker(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Donc $\dim(\ker(A)) = 1$.

Définition 4.42

Image d'une matrice

Soit $A = [\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n]$ une matrice de taille $m \times n$:

Le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^m engendré par les n vecteurs colonne de la matrice A est appelé *image de A* , noté $\text{Im}(A)$:

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \subset \mathbb{R}^m.$$

Rappel. Pour $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linéaire, $\text{Im}(T) = \{ \vec{b} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n, T(\vec{x}) = \vec{b} \}$.

Propriété 4.43

Soit $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, alors $\text{Im}(A) = \text{Im}(T_A)$.
 $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$

Démonstration. 1. $\text{Im}(T_A) \subseteq \text{Im}(A)$: Soit $\vec{b} \in \text{Im}(T_A)$. Alors $\exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $T_A(\vec{x}) = \vec{b}$.

Or $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$, donc $\exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $A\vec{x} = \vec{b}$.

Donc $\exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n$.

Donc $\vec{b} \in \text{Vect}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, donc $\vec{b} \in \text{Im}(A)$.

2. $\text{Im}(A) \subseteq \text{Im}(T_A)$: Soit $\vec{b} \in \text{Im}(A)$. Alors $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Donc

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

$$\text{Donc } \vec{b} = A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Ainsi il existe un vecteur de \mathbb{R}^n , $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$, tel que $\vec{b} = A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$.

Donc $\vec{b} \in \text{Im}(T_A)$. □

Définition 4.44*Rang d'une matrice*

La dimension du sous-espace des colonnes de A est appelée *rang de la matrice* A , noté $\text{rang}(A)$:

$$\text{rang}(A) = \dim(\text{Im}(A)).$$

Exemple. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 8 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{bmatrix}$. $\text{Im}(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \right)$.

Mais $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$, donc ces trois vecteurs ne sont pas linéairement indépendants.

Par contre, $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ est libre.

Donc $\text{Im}(A) = \text{Vect}(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ et $\dim(\text{Im}(A)) = 2 = \text{rang}(A)$.

Remarque importante 4.45

$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ donc (\vec{a}_1, \vec{a}_2) correspond aux colonnes pivot de A .

Théorème 4.46

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$$

Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.

$$\text{rang}(A) = \dim(\text{Im}(A)) = \dim(\text{Im}(A^T)) = \text{rang}(A^T).$$

Démonstration. Admis. □

Corollaire 4.47

Si A est de taille $m \times n$, alors $\text{rang}(A) \leq \min(m, n)$.

Démonstration. $\text{Im}(A) \subset \mathbb{R}^m$, donc $\text{rang}(A) \leq m$.

Et $\text{Im}(A^T) \subset \mathbb{R}^n$, donc $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T) \leq n$. □

Théorème 4.48

$$A \sim B \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(B)$$

Deux matrices équivalentes ont le même rang :

$$A \sim B \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(B)$$

Démonstration. Admis.

Idée : Cela repose sur la propriété que si E est inversible, alors $\text{rang}(EA) = \text{rang}(A)$ Or si $A \sim B$ alors il existe un ensemble de matrices élémentaires inversibles E_i telles que $A = E_k \cdots E_1 B$. □

Déterminer une base de $\text{Im}(A)$

Théorème 4.49

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et R une forme échelonnée réduite de A . Alors

1. Les colonnes pivots de R sont linéairement indépendantes.
2. Les colonnes pivots de A (donc celles qui correspondent aux colonnes pivots de R) sont linéairement indépendantes.
3. Les colonnes non-pivots sont des combinaisons linéaires des autres colonnes.

Remarque 4.4.0.50. *Les opérations élémentaires sur les lignes préservent les relations d'indépendance ou de dépendance linéaire des colonnes.*

Démonstration. Soit R la forme échelonnée réduite par lignes de A .

1. Dans R , chaque colonne pivot contient un seul coefficient non nul, égal à 1, situé sur une ligne distincte, et tous les autres coefficients de cette colonne sont nuls. Il est donc immédiat que ces colonnes sont linéairement indépendantes (il suffit de l'écrire explicitement).
2. Comme R est obtenue à partir de A par des opérations élémentaires sur les lignes, il existe une matrice inversible E telle que $R = EA$. Les colonnes de R sont donc les images des colonnes de A par l'application linéaire représentée par E . Or une application linéaire inversible préserve les relations de dépendance linéaire :

$$E(c_1 \vec{a}_{j_1} + \cdots + c_p \vec{a}_{j_p}) = 0 \iff c_1 \vec{a}_{j_1} + \cdots + c_p \vec{a}_{j_p} = 0.$$

Les colonnes pivots de A sont donc linéairement indépendantes.

3. Enfin, dans la forme échelonnée réduite R , chaque colonne non-pivot s'exprime comme combinaison linéaire des colonnes pivots. En effet, $R = EA$ avec E inversible signifie que chaque colonne de R est obtenue en appliquant la même combinaison linéaire (définie par E) aux colonnes de A . Ainsi, toute relation entre colonnes dans R correspond à une relation identique entre les colonnes de A , et les colonnes non-pivots de A sont des combinaisons linéaires des colonnes pivots.

□

Méthode 4.51

Stratégie pour trouver une base de $\text{Im}(A)$

Stratégie pour trouver une base de $\text{Im}(A)$:

1. Échelonner et réduire A .
2. Les colonnes de A qui correspondent aux colonnes pivots de R forment une base de $\text{Im}(A)$.

Plus généralement, si A a k colonnes pivot, tout ensemble linéairement indépendant de k colonnes de A forme une base de $\text{Im}(A)$.

Cas particulier : Si A est de taille $m \times n$ et si R a un pivot sur chaque ligne (autrement dit, si R a m pivots), alors $\text{rang}(A) = \dim(\text{Im}(A)) = m$. Dans ce cas, $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^m$ et tout ensemble libre de m vecteurs de \mathbb{R}^m constitue une base de $\text{Im}(A)$.

Remarque importante 4.52

Attention ! De manière générale, les colonnes pivot de R ne constituent pas une base de $\text{Im}(A)$: elles appartiennent à $\text{Im}(R)$, pas à $\text{Im}(A)$.

Exemple.

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 & \vec{r}_2 & \vec{r}_3 \end{bmatrix} = R.$$

Ainsi, $\dim(\text{Im}(A)) = \text{rang}(A) = 2$ et nous pouvons prendre

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \quad \text{ou} \quad (\vec{a}_1, \vec{a}_3) \quad \text{ou} \quad (\vec{a}_2, \vec{a}_3)$$

comme base de $\text{Im}(A)$. Par contre, nous ne pouvons pas prendre ici (\vec{r}_1, \vec{r}_2) comme base de $\text{Im}(A)$ car la troisième composante des vecteurs \vec{r}_1 et \vec{r}_2 est nulle. Donc aucune colonne de A n'appartient à $\text{Vect}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$.

Nous remarquons néanmoins que les colonnes de A et R ont la même relation de dépendance linéaire :

$$\vec{r}_3 = -3\vec{r}_1 + 2\vec{r}_2 \quad \text{et} \quad \vec{a}_3 = -3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2.$$

Remarque 4.4.0.53. *En résumé :*

- Colonnes pivots de A : base de $\text{Im}(A)$.
- Nombre de variables libres : nombre de vecteurs dans la base de $\text{Ker}(A)$

On a donc le théorème suivant.

Théorème 4.54

Théorème du rang

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Nous avons

$$\dim(\text{Ker}(A)) + \text{rang}(A) = n.$$

Démonstration. Nous avons

$$(\text{nombre de variables libres}) + (\text{nombre de pivots}) = (\text{nombre d'inconnues})$$

□

Remarque importante 4.55

Attention ! Le nombre de colonnes non pivot de A nous donne la dimension de $\text{Ker}(A)$, mais il est faux en général que les colonnes non pivot de A sont dans $\text{Ker}(A)$. Cela n'a en fait pas de sens, en général.

En effet, si A est de taille $m \times n$, alors les colonnes de A sont des vecteurs de \mathbb{R}^m , mais $\text{Ker}(A) \subset \mathbb{R}^n$.

Exemples. 1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

x_1, x_3 sont des variables de base et x_2, x_4, x_5 sont des variables libres.

On a donc immédiatement $\text{Im}(A) = \text{Vect}(\vec{a}_1, \vec{a}_3)$ et $\dim \text{Ker}(A) = 3$.

Déterminons $\text{Ker}(A)$.

$$\text{Ker}(A) : \begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \text{ libre, } r \in \mathbb{R} \\ x_3 = -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \text{ libre, } s \in \mathbb{R} \\ x_5 \text{ libre, } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc

$$\vec{x} \in \text{Ker}(A) \Leftrightarrow \vec{x} = r \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Ces trois vecteurs engendrent $\text{Ker}(A)$ qui est de dimension 3, ils constituent donc une base de $\text{Ker}(A)$.

2. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

$$\text{rang}(A) = 2 \Rightarrow \begin{cases} \dim(\text{Ker}(A)) = 3 - 2 = 1 \\ \dim(\text{Im}(A)) = 2 \end{cases}$$

Système homogène associé à R :

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases} \quad \begin{matrix} (2 \text{ variables de base}) \\ (1 \text{ variable libre}) \end{matrix}$$

Solution générale : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}$

Donc $\text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

Comme $\dim(\text{Im}(A)) = 2$, il faut choisir deux colonnes de A linéairement indépendantes pour avoir une base de $\text{Im}(A)$. Par exemple,

$$\text{Im}(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right), \quad \text{Im}(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right), \quad \text{Im}(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$$

Remarques 4.4.0.56. (a) Nous pouvons remplacer $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ par $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ci-dessus.

(b) Nous avons ici

$$\text{Im}(R) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \text{Im}(A) \neq \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

3. Déterminer le noyau et l'image de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = R$$

$$\text{rang}(A) = 3 \Rightarrow \begin{cases} \dim(\text{Ker}(A)) = 5 - 3 = 2 \\ \dim(\text{Im}(A)) = 3 \end{cases}$$

Comme $\dim(\text{Im}(A)) = 3$ et $\text{Im}(A) \subset \mathbb{R}^3$ on a $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^3$.

Système homogène associé à R :

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 - x_5 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -2x_5 \end{cases}$$

$$\text{Solution générale : } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } s, t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Donc } \text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Corollaire 4.57

Si A est une matrice $n \times n$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible.
2. $\text{rang}(A) = n$.
3. $\dim \text{Ker}(A) = 0$.

Démonstration. Il s'agit du théorème du rang 4.54 appliqué au théorème de caractérisation des matrices inversibles 2.23. \square

4.4 Rang et système d'équations linéaires

Considérons à nouveau le système d'équations linéaires à m équations et n inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \quad (3) \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \quad (m) \end{array} \right. \quad (\star)$$

Nous avons vu que nous pouvons exprimer ce système sous forme matricielle :

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

De plus, nous avons défini la matrice augmentée associée au système (\star) :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Les résultats obtenus au chapitre 1 peuvent se reformuler de la manière suivante :

Théorème 4.58

1. Si $\text{rang}(A) < \text{rang}([A \mid \vec{b}])$ alors le système n'a pas de solution.
2. Si $\text{rang}(A) = \text{rang}([A \mid \vec{b}]) = n$ alors le système possède une solution unique.
3. Si $\text{rang}(A) = \text{rang}([A \mid \vec{b}]) < n$ alors le système possède une infinité de solutions.

Démonstration. Nous avons vu que les opérations élémentaires sur les lignes ne changent ni le rang ni les solutions du système. Par conséquent, il suffit de considérer la matrice échelonnée-réduite associée au système :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{bmatrix}$$

pour conclure. □

4.5 Espace des lignes d'une matrice

Définition 4.59

Vecteurs lignes, sous-espace des lignes, rang d'une matrice

Soit A une matrice de taille $m \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Les vecteurs

$$\vec{\ell}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}, \quad \vec{\ell}_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{\ell}_m = \begin{bmatrix} a_{m1} \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

sont les vecteurs colonnes de A^T . Nous dirons que ce sont les *vecteurs ligne* de la matrice A . Le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n engendré par les m vecteurs ligne de la matrice A est appelé *sous-espace des lignes* de A , noté $\text{Lgn}(A)$:

$$\text{Lgn}(A) = \text{Vect}(\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \dots, \vec{\ell}_m) \subset \mathbb{R}^n$$

Remarque 4.4.0.60. 1. $\text{Lgn}(A) = \text{Im}(A^T)$ et $\text{Lgn}(A^T) = \text{Im}(A)$.

2. Comme $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$, $\text{rang}(A) = \dim(\text{Lgn}(A))$.

Exemple. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Nous avons $\vec{\ell}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\vec{\ell}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Et, $\text{rang}(A) = 2$ car les vecteurs $\vec{\ell}_1$ et $\vec{\ell}_2$ sont linéairement indépendants.

Propriété 4.61

Si A et C sont deux matrices équivalentes alors

$$\text{Lgn}(A) = \text{Lgn}(C).$$

Démonstration. Comme $A \sim C$, les lignes de la matrice C peuvent être obtenues à partir de celles de la matrice A à l'aide des opérations élémentaires sur les lignes. Par conséquent, les lignes de C sont des combinaisons linéaires des lignes de A et de ce fait, elles se trouvent dans le sous-espace des lignes de A , ce qui implique

$$\text{Lgn}(C) \subset \text{Lgn}(A).$$

En inversant le rôle de A et C nous trouvons

$$\text{Lgn}(A) \subset \text{Lgn}(C),$$

ce qui nous donne l'égalité cherchée. \square

Remarque 4.4.0.62. *Nous retrouvons le théorème 4.48 : si A et C sont deux matrices équivalentes alors*

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(C).$$

Remarque 4.4.0.63. *Si R est une matrice échelonnée-réduite avec r lignes non-nulles :*

$$R = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} r \text{ lignes non-nulles}$$

alors les r lignes non-nulles sont automatiquement linéairement indépendantes et de ce fait, forment une base du sous-espace des lignes de R . Il s'en suit que

$$\text{rang}(R) = r.$$

Remarque 4.4.0.64. *Soit A une matrice de taille $m \times n$ et soit R la matrice échelonnée-réduite associée à la matrice A . Nous avons*

$$\text{Lgn}(A) = \text{Lgn}(R)$$

et il est pratique d'utiliser l'ensemble formé des r lignes non-nulles de R comme base de $\text{Lgn}(A)$.

De plus, pour calculer le rang d'une matrice quelconque A , il suffit de compter le nombre de lignes non-nulles de R (ou le nombre de lignes non-nulles de toute matrice échelonnée associée à A).

Exemples. 1. Comme

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

nous trouvons

$$\text{rang}(A) = 2$$

et nous pouvons prendre $\left(\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -3 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right] \right)$ comme base de $\text{Lgn}(A)$.

Tout vecteur de $\text{Lgn}(A)$ peut s'écrire sous la forme

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ 2\mu - 3\lambda \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

De ce fait, nous avons un moyen simple de caractériser l'appartenance à $\text{Lgn}(A)$:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \text{Lgn}(A) \iff v_3 = 2v_2 - 3v_1$$

Bien entendu, comme $\dim(\text{Lgn}(A)) = 2$, pour avoir d'autres bases de $\text{Lgn}(A)$ il suffit de choisir deux lignes de A linéairement indépendantes :

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right), \quad \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right) \quad \text{ou} \quad \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right).$$

2. Soit $W = \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ où $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Calculer $\dim W$ et donner une base de W .

Soit A la matrice dont les lignes sont les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Nous avons donc

$$W = \text{Lgn}(A) \quad \text{et} \quad \dim W = \text{rang}(A).$$

L'échelonnement et la réduction de la matrice A nous donne :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Comme $\text{rang}(A) = 2$ nous trouvons ainsi

$$\dim W = 2.$$

Comme il n'y a pas vecteurs ligne colinéaires, nous avons ces choix de base de W :

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2), \quad (\vec{v}_1, \vec{v}_3), \quad (\vec{v}_2, \vec{v}_3), \quad \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Comme tout vecteur de $W = \text{Lgn}(A)$ peut s'écrire sous la forme

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \lambda + \mu \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

nous avons un moyen simple de caractériser l'appartenance à W :

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \in W \iff w_3 = w_1 + w_2$$

Ainsi, nous vérifions immédiatement que

$$\begin{bmatrix} 2025 \\ 2026 \\ 4051 \end{bmatrix} \in W \quad (\text{car } 2025 + 2026 = 4051).$$

$$\begin{bmatrix} 123 \\ 456 \\ 789 \end{bmatrix} \notin W \quad (\text{car } 123 + 456 = 579 \neq 789).$$

Remarques 4.4.0.65. Le calcul est plus long en utilisant les bases (\vec{v}_1, \vec{v}_2) , (\vec{v}_1, \vec{v}_3) et (\vec{v}_2, \vec{v}_3) .

4.6 Applications linéaires

4.6.1 Définition et propriétés

Définition 4.66

Application linéaire entre espaces vectoriels

Soit V, W deux espaces vectoriels.

Soit $T : V \rightarrow W$ une transformation. On dit que T est une *application linéaire* (ou *transformation linéaire*) si

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$ pour tout $u, v \in V$.
2. $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ pour tout $u \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemples. 1. $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_2$ est linéaire (dérivée)

$$p \mapsto p'$$

En effet, $T(p + q) = (p + q)' = p' + q' = T(p) + T(q)$

$$T(\lambda p) = (\lambda p)' = \lambda p' = \lambda T(p)$$

2. $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire.

$$p \mapsto \int_0^1 p(x) dx$$

En effet, $T(p + q) = \int_0^1 (p + q)(x) dx = \int_0^1 (p(x) + q(x)) dx$

$$= \int_0^1 p(x) dx + \int_0^1 q(x) dx = T(p) + T(q)$$

$$T(\lambda p) = \int_0^1 (\lambda p)(x) dx = \int_0^1 \lambda p(x) dx = \lambda \int_0^1 p(x) dx = \lambda T(p)$$

Propriété 4.67

$$T(0_V) = 0_W$$

Si $T : V \rightarrow W$ est une application linéaire alors $T(0_V) = 0_W$.

Démonstration. Nous avons : $T(0_V) = T(0u) = 0T(u) = 0_W$ □

Remarque 4.4.0.68. De manière équivalente : Si $T(0_V) \neq 0_W$ alors $T : V \rightarrow W$ n'est pas une application linéaire.

On a donc un critère simple pour décider si une transformation n'est pas une application linéaire.

Attention ! Si $T(0_V) = 0_W$, alors T n'est pas forcément linéaire.

Propriété 4.69

Principe de superposition

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Alors :

1. $T(\lambda u + \mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v)$ pour tout $u, v \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
2. Principe de superposition :

$$T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k) = \lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2) + \dots + \lambda_k T(u_k)$$

pour tout $u_1, \dots, u_k \in V$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.

Démonstration. 1. $T(\lambda u + \mu v) = T(\lambda u) + T(\mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v)$

2. Il suffit d'écrire $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k = \lambda_1 u_1 + (\lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k)$ et utiliser la partie a. (plusieurs fois).

□

4.6.2 Matrice associée à une application linéaire $T : V \rightarrow W$

Rappel. Si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors on peut lui associer la matrice

$$\begin{matrix} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \vec{x} & \longmapsto & A\vec{x} \end{matrix}$$

de taille $m \times n$ dont les colonnes sont les images des n vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n :

$$A = \left[T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2) \quad \dots \quad T(\vec{e}_n) \right]$$

appelée *matrice canoniquement associée à T* .

Nous allons voir maintenant comment associer une matrice à une application linéaire $T : V \rightarrow W$ où V, W sont des espaces vectoriels quelconques.

Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$. Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ une base de V .

Nous avons vu que tout vecteur $v \in V$ s'écrit de manière unique :

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n, \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

et nous avons noté

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

le vecteur de coordonnées de v dans la base \mathcal{B} .

Théorème 4.70

L'application $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est linéaire et bijective.

$$v \longmapsto [v]_{\mathcal{B}}$$

Cette application s'appelle *l'application coordonnées*.

Démonstration. — Pour montrer la linéarité, nous avons deux points à montrer.

1. $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ pour tout $u, v \in V$.

Supposons que $u = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ et $v = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$.

Alors $u + v = (\lambda_1 + \mu_1)b_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n)b_n$

$$\text{d'où } \varphi(u + v) = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_n + \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \varphi(u) + \varphi(v) \text{ pour tout } u, v \in V.$$

2. $\varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u)$ pour tout $u \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comme $\lambda u = \lambda(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = (\lambda \lambda_1)b_1 + \dots + (\lambda \lambda_n)b_n$

$$\text{on a : } \varphi(\lambda u) = \begin{bmatrix} \lambda \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda \varphi(u) \text{ pour tout } u \in V \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}$$

— L'application est bijective car l'écriture $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ est unique. □

Remarque importante 4.71

Ce théorème nous indique que dès lors qu'une base a été choisie, l'application coordonnée fournit sans ambiguïté (bijectivement) un dictionnaire qui traduit les éléments d'un espace vectoriel de dimension n quelconque, vers des vecteurs de \mathbb{R}^n .

Par conséquent, tout ce qui a été vu dans les chapitres précédents, où les seuls espaces vectoriels considérés étaient du type \mathbb{R}^n (ou \mathbb{R}^m , etc.) va pouvoir être traduit et adapté aux espaces vectoriels quelconques de dimension finie.

Notamment l'existence d'une matrice associée à une application linéaire !

Soit maintenant W un espace vectoriel de dimension $m > 0$. Soit $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ une base de W .

De même que pour φ , l'application $\psi : W \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est linéaire et bijective.

$$w \longmapsto [w]_{\mathcal{B}'}$$

Considérons maintenant une application linéaire $T : V \rightarrow W$

Nous avons

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) \\ &= T(\lambda_1 b_1) + \dots + T(\lambda_n b_n) \quad \text{par linéarité} \\ &= \lambda_1 T(b_1) + \dots + \lambda_n T(b_n) \quad \text{par linéarité} \end{aligned}$$

Cette expression nous dit qu'il suffit de connaître tous les $T(b_i)$ pour connaître $T(v)$, pour tout $v \in V$.

Nous avons le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 v \in V & \xrightarrow{T} & W \ni T(v) \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\
 [v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\text{?}} & \mathbb{R}^m \ni [T(v)]_{\mathcal{B}'}
 \end{array}$$

La flèche en pointillés correspond à une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m . Elle a donc une matrice qui lui est canoniquement associée, A . Autrement dit, A est la matrice de taille $m \times n$ telle que

$$[T(v)]_{\mathcal{B}'} = A[v]_{\mathcal{B}}$$

Nous avons vu que les colonnes de A sont les images des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n , par l'application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m qui lui est associée.

Comme par construction $\vec{b}_i = 0 \cdot b_1 + \cdots + 1 \cdot b_i + \cdots + 0 \cdot b_n$ on a $[\vec{b}_i]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{e}_i$.

On peut donc restreindre le graphique précédent aux b_i :

$$\begin{array}{ccc}
 \vec{b}_i & \xrightarrow{T} & T(\vec{b}_i) \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\
 \vec{e}_i & \xrightarrow{\text{?}} & [T(\vec{b}_i)]_{\mathcal{B}'}
 \end{array}$$

L'image de \vec{e}_i est donc $[T(\vec{b}_i)]_{\mathcal{B}'}$ pour $i = 1, \dots, n$.

Nous avons donc motivé la définition suivante.

Définition 4.72

Matrice associée à une application linéaire

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V et $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ une base de W .

La matrice de taille $m \times n$ dont la i -ème colonne est le vecteur de coordonnées dans la base \mathcal{B}' de l'image par T du i -ème vecteur de la base \mathcal{B} est appelée *matrice associée à l'application linéaire T par rapport aux bases \mathcal{B} de V et \mathcal{B}' de W* , notée $A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$:

$$A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [[T(b_1)]_{\mathcal{B}'}, [T(b_2)]_{\mathcal{B}'}, \dots, [T(b_n)]_{\mathcal{B}'}]$$

Nous avons ainsi :

$$[T(v)]_{\mathcal{B}'} = A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} \quad \text{pour tout } v \in V.$$